ками),то в каждом из этих случаев p-ткань $\overline{\Sigma}_p = f(\Sigma_p)$ является p-тканью линий кривизны относительно соответствующей нормали.

Действительно, так как f конформно, то $\overline{\gamma}_{JZ} = \lambda \gamma_{JZ}$ $(J, Z = 1,\dots,n)$ и $\hat{\Delta}_{n-p} = \overline{\Delta}_{n-p}$, где $\overline{\Delta}_{n-p} = f_*(\Delta_{n-p})$. Соотношение (4) дает $\hat{\vec{n}} = \vec{\bar{n}}$, в частности $\hat{\vec{e}}_\alpha = \vec{\bar{e}}_\alpha$. Из (3) и (8) вытекает

$$\bar{a}^i_j = a^i_j - \gamma^{it} H^{\alpha_0}_{tj} \qquad (9)$$

В случае а), учитывая, что ортогональный репер R^x переходит в отображении f в ортогональный репер R^y, можно показать, что $H^J_{KZ} = 0$ $(J = K,\ J \neq Z,\ Z \neq K)$, в частности, $H^{\alpha_0}_{ij} = 0$ $(i \neq j)$. Формулы (9) дают $\bar{a}^i_j = 0$ $(i \neq j)$.

В случае б), так как распределение Δ_p вполне интегрируемо, то p-ткань Σ_p ортогональна, и мы приходим к случаю а).

В случае в) имеет место соотношение $\bar{a}^i_j = a^i_j = 0$ $(i \neq j)$.

Список литературы

1. Тихонов В.А. Сети, определяемые распределениями в аффинном пространстве и их обобщения.-В сб.:Проблемы геометрии.Т.8.Итоги науки и техники.ВИНИТИ АН СССР. М.,1977,с.197-223.

2. Шинкунас Ю.И. О распределении m-мерных плоскостей в n-мерном римановом пространстве.-Труды геометрич.семинара.ВИНИТИ АН СССР.М.,1974,т.5,с.123-133.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.16 1985

УДК 514.75

Г. Матиева

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПЛОСКИХ СЕТЕЙ

В работе рассмотрены ортогонально дополнительные распределения Δ_p и $\overline{\Delta}_{n-p}$ в евклидовом пространстве E_n. С помощью этих распределений построена сеть $\widetilde{\Sigma}_n$ и изучены некоторые ее свойства.

1. Пусть n-мерное евклидово пространство E_n отнесено к подвижному реперу $\mathcal{R} = (x, \vec{e}_A)$, где $x \in E_n$ и $|\vec{e}_A| = 1$ $(A, B, C = 1, 2, \dots, n)$. Деривационные формулы репера имеют вид $d\vec{x} = \omega^A \vec{e}_A$, $d\vec{e}_A = \omega^B_A \vec{e}_B$. Формы ω^A, ω^B_A удовлетворяют уравнениям инвариантности метрики $dg_{AB} = g_{AK}\omega^K_B + g_{KB}\omega^K_A$, где $g_{AB} = \vec{e}_A \cdot \vec{e}_B$ - ковариантные компоненты метрического тензора пространства E_n, и структурным уравнениям $\mathcal{D}\omega^A = \omega^B \wedge \omega^A_B$, $\mathcal{D}\omega^B_A = \omega^K_A \wedge \omega^B_K$.

Рассмотрим в E_n распределение Δ_p $(1 < p < n-1)$ и ортогонально дополнительное к Δ_p распределение $\overline{\Delta}_{n-p}$. Векторы $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p$ репера расположим в подпространстве $\Delta_p(x)$, а векторы $\vec{e}_{p+1}, \dots, \vec{e}_n$ - в подпространстве $\overline{\Delta}_{n-p}(x)$. При этом дифференциальные уравнения распределения Δ_p будут

$$\omega^\alpha_i = \Lambda^\alpha_{iA}\omega^A \quad (i,j,k = 1,\dots,p;\ \alpha,\beta,\gamma = p+1,\dots,n), \qquad (1)$$

а так как $\vec{e}_\alpha \in \overline{\Delta}_{n-p}(x)$, то $\omega^i_\alpha = \Lambda^i_{\alpha A}\omega^A$. Система величин $\{\Lambda^\alpha_{ij}, \Lambda^\alpha_{i\beta}\}$ образует геометрический объект - фундаментальный объект первого порядка распределения Δ_p [4]. При этом компоненты Λ^α_{ij} и $\Lambda^\alpha_{i\beta}$ образуют тензоры в отдельности. Векторы

$$\vec{M}_p = \frac{1}{p} g^{ij} \Lambda^\alpha_{(ij)} \vec{e}_\alpha, \qquad \overline{\vec{M}}_{n-p} = \frac{1}{n-p} g^{\alpha\beta} \Lambda^i_{(\alpha\beta)} \vec{e}_i$$

называются векторами средних кривизн распределений Δ_p и $\overline{\Delta}_{n-p}$ соответственно [3]. Если вектор средней кривизны распределения тождественно равен нулю, то распределение называется минимальным [3]. Будем считать, что распределения Δ_p, $\bar{\Delta}_{n-p}$ – не минимальны.

2. Дифференцируя тождества $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_\alpha = 0$, получим

$$\omega^i_\alpha = -g^{ik}\,\omega^\beta_k\, g_{\beta\alpha}$$

Отсюда имеем

$$\Lambda^i_{\alpha j} = -g^{ik}\,\Lambda^\beta_{kj}\, g_{\beta\alpha}$$

Так как система величин $\{\Lambda^\beta_{kj}\}$ образует тензор, то система величин $\{\Lambda^i_{\alpha j}\}$ тоже образует тензор.

Для вектора $\vec{\xi} = \xi^\alpha \vec{e}_\alpha \in \bar{\Delta}_{n-p}(x)$ тензор $\Lambda^i_{\alpha j}$ определяет аффинор $\Lambda^i_j = \Lambda^i_{\alpha j}\xi^\alpha$ в пространстве $\Delta_p(x)$, а для вектора $\vec{a} = a^i \vec{e}_i \in \Delta_p(x)$ тензор $\Lambda^\alpha_{i\beta}$ определяет аффинор $\Lambda^\alpha_\beta = \Lambda^\alpha_{i\beta}\, a^i$ в пространстве $\bar{\Delta}_{n-p}(x)$. В качестве вектора $\vec{\xi}$ берем вектор $\vec{M}_p$, а в качестве $\vec{a}$ – вектор $\vec{\bar{M}}_{n-p}$. Тогда

$$\Lambda^i_j = \frac{1}{p}\Lambda^i_{\alpha j}\, g^{k\ell}\Lambda^\alpha_{(k\ell)} = \Lambda^i_{\alpha j}\, m^\alpha,\quad \Lambda^\alpha_\beta = \frac{1}{n-p}\Lambda^\alpha_{i\beta}\, g^{\gamma\sigma}\Lambda^i_{(\gamma\sigma)} = \Lambda^\alpha_{i\beta}\,\bar{m}^i,$$

где

$$m^\alpha = \frac{1}{p} g^{k\ell}\Lambda^\alpha_{(k\ell)},\quad \bar{m}^i = \frac{1}{n-p} g^{\gamma\sigma}\Lambda^i_{(\gamma\sigma)}.$$

Пусть векторы $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p$ имеют собственные направления относительно аффинора Λ^i_j, а векторы $\vec{e}_{p+1}, \dots, \vec{e}_n$ – относительно аффинора Λ^α_β. Отсюда имеем

$$\Lambda^i_{\alpha j}\, m^\alpha = 0 \quad (i \neq j), \tag{2}$$

$$\Lambda^\alpha_{i\beta}\,\bar{m}^i = 0 \quad (\alpha \neq \beta). \tag{3}$$

Интегральные линии векторных полей $\vec{e}_i, \vec{e}_\alpha$ определяют сеть в пространстве E_n. Обозначим ее через $\tilde{\Sigma}_n$. Координатные векторы $\vec{e}_i, \vec{e}_\alpha$ репера направлены по касательным к линиям сети $\tilde{\Sigma}_n$. Поэтому формы ω^B_A $(A \neq B)$ главные [2]: $\omega^B_A = a^B_{AK}\,\omega^K$, где $a^\alpha_{iK} = \Lambda^\alpha_{iK}$, $a^i_{\alpha K} = \Lambda^i_{\alpha K}$. Аналитическими условиями, характеризующими сеть $\tilde{\Sigma}_n$ в пространстве E_n, являются соотношения (2), (3).

Сеть $\tilde{\Sigma}_n$ можно получить и другим путем. Выберем $n-p$ векторных полей $\vec{e}_\alpha \in \bar{\Delta}_{n-p}$ так, чтобы выполнялось условие [1]:

$$\nabla_{\vec{e}_\alpha} \vec{\bar{M}}_{n-p} \in \Delta(\Delta_p, \vec{e}_\alpha), \tag{4}$$

где ∇ – символ ковариантного дифференцирования в E_n. Интегральные линии этих векторных полей называются линиями кривизны относительно одномерного распределения $\Delta_1 = \Delta(\vec{\bar{M}}_{n-p}) \subset \Delta_p$ [1]. Так как в евклидовом пространстве абсолютный дифференциал совпадает с обычным дифференциалом, то из формулы (4) имеем:

$$d_\alpha \vec{\bar{M}}_{n-p} = \frac{1}{n-p} g^{\gamma\sigma}\Lambda^i_{(\gamma\sigma)\alpha}\vec{e}_i + \frac{1}{n-p} g^{\gamma\sigma}\Lambda^i_{(\gamma\sigma)}\Lambda^\beta_{i\alpha}\vec{e}_\beta \in \Delta(\Delta_p, \vec{e}_\alpha).$$

Отсюда получим (3).

Аналогично выберем p векторных полей $\vec{e}_j \in \Delta_p$ так, чтобы выполнялось условие $\nabla_{\vec{e}_j}\vec{M}_p \in \Delta(\bar{\Delta}_{n-p}, \vec{e}_j)$ или

$$d_j \vec{M}_p = \frac{1}{p} g^{k\ell}\Lambda^\alpha_{(k\ell)}\Lambda^i_{\alpha j}\vec{e}_i + \frac{1}{p} g^{k\ell}\Lambda^\alpha_{(k\ell)j}\vec{e}_\alpha \in \Delta(\bar{\Delta}_{n-p}, \vec{e}_j).$$

Отсюда получим (2). Таким образом, полученная сеть совпадает с сетью $\tilde{\Sigma}_n$. Из вышеизложенного следует

Т е о р е м а I. Направления векторов $\vec{e}_\alpha$ ($\vec{e}_i$) являются собственными для аффинора Λ^α_β (Λ^i_j) тогда и только тогда, когда интегральные линии векторных полей $\vec{e}_\alpha$ ($\vec{e}_i$) являются линиями кривизны относительно одномерного распределения $\Delta_1 = \Delta(\vec{\bar{M}}_{n-p})$ $(\Delta_1 = \Delta(\vec{M}_p))$.

Рассмотрим операторы T и O, действующие на векторные поля X, Y пространства E_n по правилу [5]:

$$T_X Y = H\nabla_{VX}(VY) + V\nabla_{VX}(HY), \tag{5}$$

$$O_X Y = V\nabla_{HX}(HY) + H\nabla_{HX}(VY), \tag{6}$$

где H и V – операторы проектирования на $\Delta_p(x)$ и $\bar{\Delta}_{n-p}(x)$, соответственно ∇ – символ ковариантного дифференцирования в E_n. Тогда, если имеем (2), то из (6) получим, что

$$O_{\vec{e}_j}\vec{M}_p \parallel \vec{e}_j. \tag{7}$$

Обратно, если имеем (7), то из (6) следует (2). Аналогично, если имеем (3), то из (5) следует, что

$$T_{\vec{e}_\xi} \overrightarrow{M}_{n-p} \parallel \vec{e}_\xi . \qquad (8)$$

Обратно, если имеет место (8), то из (5) получим (3). Справедлива следующая

Т е о р е м а 2. Данная сеть Σ_n в E_n является сетью типа $\widetilde{\Sigma}_n$ для некоторого p-мерного распределения, порождаемого этой сетью, тогда и только тогда, когда имеют место (7), (8).

С л е д с т в и е. Ортогональная голономная сеть Σ_n в E_n является сетью типа $\widetilde{\Sigma}_n$ для некоторого p-мерного распределения, порождаемого этой сетью.

Список литературы

1. Базылев В.Т. Сети на многообразиях.-Тр.геометрич. семинара.ВИНИТИ АН СССР.М., 1974, т.6, с.189-204.

2. Базылев В.Т. К геометрии плоских многомерных сетей.-Уч.зап.МГПИ им.В.И.Ленина, 1965, №243, с.29-37.

3. Кузьмин М.К. Сети, определяемые распределениями в евклидовом пространстве E_n, и их обобщения.-Проблемы геометрии.Итоги науки и техники.ВИНИТИ АН СССР, 1975, т.7, с.215-229.

5. Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I.-Тр.Геометрич.семинара.ВИНИТИ АН СССР, М., 1971, т.3, с.49-94.

5. Gray A. Pseudo-Riemannian almost product manifolds and submersions. Jour. Math. and Mechanics, 1967, Vol. 16, №7, p. 715-737.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.16 1985

УДК 514.75

В.В.М а х о р к и н

КОНГРУЭНЦИЯ КВАДРАТИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В $\mathbb{P}_6$

В шестимерном проективном пространстве рассматривается конгруэнция квадратичных элементов. Выбор такого объекта исследования обусловливается тем, что это семейство квадратичных элементов является одним из простейших, у которого трансверсальным образом возникают критические точки первого порядка коранга два и, следовательно, возникают фокальные точки первого порядка коранга два, ранее не изучавшиеся.

Всякой конгруэнции квадратичных элементов в $\mathbb{P}_6$ естественным образом соответствует семейство квадратичных элементов. Пусть открытое множество $U \subset \mathbb{R}^2$ является пространством параметров рассматриваемой конгруэнции, тогда семейство квадратичных элементов будет [1] шестимерным подмногообразием Z в $U \times \mathbb{P}_6$ вместе с его проекцией на первый сомножитель

$$p: Z \to U . \qquad (1)$$

Кроме того, имеем проекцию на второй сомножитель

$$\pi: Z \to \mathbb{P}_6 , \qquad (2)$$

причем для всякого $t \in U$, $\pi(p^{-1}(t))$ квадрика квадратичного элемента в $\mathbb{P}_6$, соответствующая параметру $t \in U$.

Будем считать, что отображение (2) является 1-общим отображением [2], тогда множества $S_1(\pi)$ и $S_2(\pi)$ являются подмногообразиями в Z, причем

$$Z = S_0(\pi) \cup S_1(\pi) \cup S_2(\pi) , \qquad (3)$$

здесь $S_0(\pi)$ множество регулярных точек отображения π, $S_1(\pi)$ множество особых точек коранга один отображения π,

4 Зак. 1401